Задача 1. (**Дроби)** Дано выражение: $\frac{2019*217*20*19*8}{2018*101*20*18*11}$.

Можно ли вместо звёздочек поставить знаки «+» и «–» так, чтобы после вычислений получилось: а) $\frac{7}{6}$; б) $\frac{11}{9}$? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

Ответ: а) да б) нет

Решение.

а) Пример.

$$\frac{2019*217*20*19*8}{2018*101*20*18*11}=\frac{2019+217-20-19+8}{2018-101-20-18+11}=\frac{2205}{1890}=\frac{7\cdot 315}{6\cdot 315}=\frac{7}{6}$$

б) Решение 1.

Пусть $a=2019*217*20*19*8$, тогда - a нечетно, $b=2018*101*20*18*11$, тогда - b четно и $\frac{11}{9}=\frac{a}{b}$ и $11b=9a$, число слева – чётно, справа - нет. Противоречие.

Решение 2.

Наибольшее значение дроби (при всех плюсах в числителе и всех минусах в знаменателе) меньше $\frac{11}{9}$.

$$\frac{2019+217+20+19+8}{2018-101-20-18-11}=\frac{2283}{1868}<\frac{11}{9}$$, так как $2283\cdot 9=20547$, а $1868\cdot 11=20548$

Критерии.	Баллы.
А) Верный пример.	3 балла
Правильный ответ без примера	0 баллов
Б) Правильное рассуждение	3 балла
Правильный ответ без объяснения	0 баллов

Задача 2. (**Старинная задача**) Два пеших посыльных отправились из штаба армии в дальние гарнизоны с пакетами: один – на юг, а другой – через 15 мин после первого – на север. Еще через 15 мин начальник штаба понял, что забыл вложить в пакеты письма и послал велосипедиста исправить ошибку. Догнав посыльного, велосипедист мгновенно передаёт письмо, мгновенно разворачивается и едет обратно. Скорости посыльных постоянны и равны, а скорость велосипедиста в 2 раза больше. Через какое наименьшее время велосипедист может выполнить приказ и вернуться в штаб?

Ответ: через 2 часа 30 минут.

Заметим, что догонять стоит сначала ближнего посыльного.

Действительно, разобьем наш путь на две части: до встречи с кем-то из посыльных и после. Так как скорости посыльных равны, то время, потраченное на вторую часть пути, зависит только от расстояния между путниками в начале второй части пути. Если мы поедем сначала за дальним, то и ехать за ним мы будем дольше, и расстояние между посыльными будет больше, чем если бы велосипедист ехал за ближним.

Решение 1

Будем считать, что первый посыльный стартовал в 9.00, тогда второй в 9.15

1) Велосипедист стартует в 9.30 и догонит стартовавшего посыльного в 9.15 в 9.45, (проехав за 15 мин расстояние, которое посыльный проходит за 30 мин) забирает пакет, разворачивается и едет к стартовавшему в 9.00.

2) В 9.45 расстояние между велосипедистом пеший посыльный проходит за 75 мин, а велосипедист догонит посыльного, как раз за 75 минут, в 11.00.

3) В штаб он вернется еще через час – в 12.00, поэтому выполнит задание за 2 часа 30 минут.

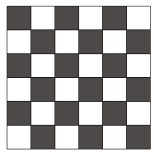
Решение 2:

Подсчитаем время, которое нам при этом понадобится. Пусть за 15 минут посыльные проходят x км.

Догоняем второго за 15 минут. Находимся в $2x$ км от штаба. Второй находится в $3x$ км от штаба в другую сторону. Тогда нам понадобится еще 5*15 минут. Итого 15+5*15=90(мин) или 1,5 часа. На обратный путь велосипедисту потребуется проехать путь $8x$, т.е. 1 час. Он вернется через 2.30.

Критерии.	Баллы.
Верное решение	6 баллов
Пошел за ближайшим, но не объяснил почему	4 балла
Правильная последовательность вычислений, но арифметическая ошибка	3 балла (обязательно показать старшему по проверке)
Все посчитал правильно, но в штаб не вернулся	3 балла(обязательно показать старшему по проверке)
Если человек думал, что ответ надо считать с момента выхода первого посыльного. Ответ 3 часа	4 балла

Задача 3. (Гномы и эльфы) В каждой черной клетке на клетчатом поле 6×6 (см. рис.) живет гном, в каждой белой – эльф. Во вторник у каждого из них было не менее одной монеты. В среду каждый эльф дал каждому своему соседу-гному столько монет, сколько у этого гнома было во вторник. В пятницу каждый гном дал каждому своему соседу-эльфу столько монет, сколько у этого эльфа было в четверг. В другие дни монеты не передавались. Могло ли оказаться, что после этого у каждого эльфа и каждого гнома стало столько же монет, сколько было во вторник? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.



ОТВЕТ: Да могло.

РЕШЕНИЕ 1 (текст).

Пусть во вторник у каждого гнома 1 монета, а у каждого эльфа на 1 больше, чем число его соседей-гномов.

В среду каждый эльф раздаёт соседям-гномам по 1 монете и остается сам с 1 монетой.

В пятницу ему каждый из гномов вернёт по 1 монете. У каждого эльфа число монет осталось прежним. И у гномов число монет осталось прежним.

РЕШЕНИЕ 2 (таблицы по состоянию на вторник, среду и пятницу)

Вторник

1	4	1	4	1	3
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
3	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
3	1	4	1	4	1

Среда

3	1	4	1	4	1
1	5	1	5	1	4
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
4	1	5	1	5	1
1	4	1	4	1	3

Пятница

1	4	1	4	1	3
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
3	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
3	1	4	1	4	1

Критерии.	Баллы.
Верный пример (таблица или текст)	7 баллов
Если в ответе описана только верная ситуация во вторник, а ситуации в среду и пятницу не описаны.	6 баллов
Остальное	0 баллов

Задача 4. (**Марафон**) На острове рыцарей и лжецов прошел марафонский забег. После забега каждому жителю острова задали 2 вопроса: «Участвовали ли Вы в забеге?» и «Добежали ли Вы до финиша?». Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а на вопросы отвечали «Да» или «Нет». На первый вопрос 50% опрошенных ответили «Да». На второй вопрос 45% опрошенных ответили «Нет». Кого среди участников забега, не добежавших до финиша, больше: рыцарей или лжецов?

Решение 1.
Кто из опрошенных на второй вопрос ответил иначе, чем на первый:
1. Рыцари, которые участвовали в забеге, но до финиша не добежали
2. Лжецы, которые участвовали и не финишировали
Т.е. % ответивших «Да» вырос.
Значит, лжецов, которые участвовали, но не финишировали – больше.

Ответ: Лжецов.

Решение 2.

Среди 50% опрошенных, которые сказали, что участвовали в забеге = рыцари, участвовавшие в забеге и лжецы, которые не участвовали: $a+d=50$.

Кто на второй вопрос ответил не так, как на первый?

1) Те рыцари, кто участвовал в забеге и не финишировали, их $a-x$ - количество "да" - уменьшится

2) лжецы, которые участвовали и не финишировали (их t они скажут - да) - количество "да" - увеличится на t, все прежние скажут тоже "да".

Ответ: Лжецов.

Решение 3.
Введём неизвестные:

	Не участвовали	Участвовали, но не добежали	Участвовали и добежали
Рыцари	x	m	a
Лжецы	y	n	b

Скажут, что участвовали в забеге: $y+m+a$. Т.к. это половина всех жителей острова, то $y+m+a=x+n+b$.

Ответят, что смогли добежать до финиша $y+n+a$. Т.к. это больше половины всех жителей острова, то $y+n+a>x+m+b$.

Если половина жителей острова составляет P человек, то переписав уравнение в виде $y+m+a=x+n+b=P$, получим: $y+a=P-m$ и $x+b=P-n$.

Подставив в неравенство, получим: $P-m+n>P-n+m$, откуда $n>m$.

Ответ: Лжецов.

Критерии.	Баллы.
Верное решение	6 баллов
Составил правильную систему в духе Решения 3 и не решил её	2 балла
Правильный ответ без объяснений	0 баллов

Задача 5. (Крестики-нолики) Требуется расставить в квадратной таблице 6×6 крестики и нолики так, чтобы внутри любого квадрата 3×3 крестиков было больше, чем ноликов, а внутри любого квадрата 5×5 ноликов было больше, чем крестиков. Возможно ли это? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

Ответ: возможно. Пример.

X	0	X	X	0	X
0	0	X	0	0	X
X	0	X	X	0	X
X	0	X	X	0	X
X	0	0	X	0	0
X	0	X	X	0	X

Критерии.	Баллы.
Верный пример.	7 баллов
Правильный ответ без примера	0 баллов

Задача 6. (**Мешки с алмазами)** На лавке стоят два пустых мешка: чёрный и белый и лежит много мелких алмазов. Кощей Бессмертный и Баба-Яга играют в игру**:** по очереди кладут алмазы в мешки. Кощей каждым своим ходом имеет право положить либо два алмаза в белый мешок, либо один − в чёрный, а Баба-Яга − либо два алмаза в чёрный мешок, либо один − в белый. Начинает Кощей. Побеждает тот, после хода которого в каком-нибудь мешке окажется больше 2019 алмазов. Кто может гарантированно победить и как для этого нужно играть?

Ответ: Баба Яга.

Стратегия:

1) Вначале Баба Яга копирует ходы Кощея.

Количество алмазов в мешках будет увеличиваться или на 1, или на 2 и при этом алмазов в каждом мешке будет после хода Бабы Яги поровну.

Если выбрать любые два последовательных натуральных числа, то поскольку количество алмазов в мешках увеличивается либо на 1, либо на 2, то в какой-то момент оно обязательно станет равным одному из этих выбранных чисел.

(Геометрически: если выкрасить две соседние целые точки на прямой и идти по целым точкам этой прямой с шагом 1 или 2, то обязательно попадёшь в одну из этих точек).

Возьмём в качестве этих двух последовательных чисел 2014 и 2015.

Как только количество алмазов в мешках станет равным одному из этих чисел, тактика Бабы Яги меняется.

(А) Если по 2014, то Баба Яга дополняет ходы Кощея до 3 (если он положит в какой-то мешок 1 алмаз, то она 2, а если он 2, то она 1). Так после ходов Бабы Яги в мешках может быть 2017 алмазов, а затем 2020 алмазов – и она победила.

(Б) Если по 2015, то события могут разворачиваться по двум вариантам:

- если Кощей положит 2 алмаза в белый мешок, то Баба Яга положит 2 в чёрный, станет по 2017 и, в какой бы мешок Кощей ни пошел, Баба Яга дополнит его ход до 2020 и выиграет.

- если Кощей положит 1 алмаз в черный мешок, то Баба Яга добавит в черный 2 алмаза, там станет 2018. Кощей не может дополнить его до 2020 одним ходом и, как бы он ни ходил, Баба Яга добавляет 2 в черный мешок и выигрывает.

Критерии.	Баллы.
Верная стратегия	7 баллов
Правильный ответ без объяснений	0 баллов
Применил симметрическую стратегию	+1 балл
Применил стратегию дополнения до 3	+1 балла